Instabilité linéaire et non linéaire dans le modèle de Kull-Anisimov

Olivier LAFITTE[*][†][‡]

Roscoff, 29 août 2008.

[*]Laboratoire d'Analyse, Géométrie et Applications, Institut Galilée, Université de Paris XIII

[†]Département de modélisation des systèmes et structures, Direction de l'Energie Nucléaire, CEA Saclay

[‡]EADS-CCR-Suresnes

Base du modèle: équations présentées par Catherine Cherfils et par Josselin Garnier

Traitements proposés:

• linéarisation des équations de Kull autour d'un profil stationnaire dépendant uniquement de la variable x caractérisant la gravité, mode k pour la perturbation, longueur caractérisant l'épaisseur du front L_0 (comme introduit par Grégoire Allaire: un nombre physique que l'on fait tendre vers 0, ou Didier Jamet)

$$\alpha\beta = kL_0, \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{Fr} = \frac{gL_0}{V_a^2}$$

α tend vers 0, β fixé dans un compact évitant 0.

Etude non linéaire d'instabilité:

• équations d'Euler incompressible avec étude d'une solution voisine du profil de densité de Kull: preuve mathématique de l'instabilité non linéaire et de la saturation du taux de croissance. La saturation du taux de croissance s'exprime par:

$$\max(\frac{\rho_0'}{\rho_0})g = \Lambda^2.$$

Système (modèle quasi-isobare avec pression dominante P_0 indépendante de t et de la position, exactement le même que l'approximation bas Mach (Majda, Dellacherie)):

$$\partial_t \rho + \mathrm{div}(\rho \vec{u}) = 0$$

$$\partial_t(\rho \vec{u}) + \mathrm{div}(\rho \vec{u} \otimes \vec{u} + pI) = \rho \vec{g}$$

$$\mathrm{div}(\vec{u} - L_0 V_a \nabla Z(\rho)) = 0$$

$$P_0 = (c_p - c_v)\rho T, \nabla(Z(\rho)) = \frac{k(T)}{k(T_a)} \nabla \frac{T}{T_a}$$

Avant-dernière équation provient de

$$\rho D_t h - D_t p + \mathrm{div}(\vec{Q}) = 0, p = (c_p - c_v)\rho T, h = c_p T.$$

Longueur L_0 définie par la conduction thermique et par les constantes ρ_0, V_a, T_a.

1 Le profil de Kull

Solution ne dépendant que de x: $\rho u = cste = -\rho_a V_a, w = 0$, puis
$(\rho u^2 + p)' = \rho g$ (hydro)
$(u - L_0 V_a (Z(\rho))')' = 0$ (thermique)

$$-\frac{\rho_a V_a}{\rho_*} + L_0 V_a (Z(\rho_*))' = -V_a$$

Notons $\xi(y) = \rho_a^{-1} \rho_*(L_0 y)$:

$$\frac{d}{dy}(Z(\rho_a \xi)) = \frac{1-\xi}{\xi}.$$

• Cas particulier (Kull Anisimov):$k(T) = \kappa T^\nu \Rightarrow Z(\rho_a \xi) = \frac{1}{(\nu+1)\xi^{\nu+1}}$
Equation

$$\dot{\xi} = \xi^{\nu+1}(1-\xi)$$

Comportement exponentiel en $\xi \to 1$ $(y \to +\infty)$
Comportement rationnel en $\xi \to 0$ $(y \to -\infty)$:

$$\nu \xi^{\nu} \simeq -\frac{1}{y}.$$

• Cas général si $Z(\rho_a \xi) = F(\frac{1}{\xi})$, F de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, strictement croissante

$$\dot{\xi} = \frac{\xi(1-\xi)}{F'(\frac{1}{\xi})}$$

ξ est strictement croissante de R sur $]0, 1[$.
$F'(1) \neq 0$, comportement exponentiel au voisinage de $\xi = 1$
$F'(x) \simeq x^{-\alpha}, x \to +\infty$ comportement rationnel

2 Adimensionnalisation et linéarisation

Variables conservatives hydrodynamiques:

$$\begin{aligned}
&\rho u = -\rho_a V_a + \rho_a V_a x_1 \\
&\rho u^2 + p = p_0(x) + \rho_0(x)(u_0(x))^2 + \rho_a V_a^2 x_2 \\
&\rho u w = -i \rho_a V_a^2 x_3
\end{aligned}$$

Quatre inconnues ρ, u, w, p et trois nouvelles inconnues pour le moment x_1, x_2, x_3.
Dernière variable (d'état) adaptée au problème: $x_4 = Z(\rho_0) - Z(\rho)$.
$\Rightarrow$ On peut obtenir les termes $\rho w^2 + p$, ρw et ρ qui nous manquaient.

Notation $\vec{\tau} = \vec{u} - L_0 V_a \nabla Z(\rho)$,
Variable thermique supplémentaire x_5, tq $\tau_1 = -V_a + V_a x_5$.
On a $\tau_2 = V_a[\frac{x_3}{1-x_1} - L_0 \partial_z x_4]$. Système total sur x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

Nous pouvons donc linéariser, passer en modes normaux $x_j = \bar{x}_j e^{\sigma t + ikz}$ (complexe!!!) puis adimensionner.

Avec
$X = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5)^t$,
$Y = (\bar{x}_1 - \alpha\gamma\xi(y)\bar{x}_4, \bar{x}_2 - \frac{\alpha}{\beta}\xi(y)\bar{x}_4, \bar{x}_3 - \alpha\beta\xi(y)\bar{x}_4, \alpha\beta\frac{\xi(y)}{1-\xi(y)}\bar{x}_4, \bar{x}_5)^t$, on a les deux systèmes

$$\frac{dX}{dy} + M_0(\alpha, \beta, \gamma\xi(y))X = 0$$

$$\frac{dY}{dy} + \alpha B(\beta, \gamma, \xi(y))Y = 0$$

Pourquoi les deux?
Le premier car c'est le plus commode pour ξ tendant vers 0,
Le deuxième car, pour ξ tend vers 1, on a un paramètre naturel de série entière α tendant vers 0 si L_0 tend vers 0 et V_a, k, g fixés.

On a aussi une équation différentielle ordinaire d'ordre 5:

$$P(y, h, \sigma, h\frac{d}{dy})(x_4) = 0, h = (kL_0)^{-1}$$

Résultats:

I) Il n'existe pas de solution bornée du système correspondant à $\beta \in [\beta_0, \beta_0^{-1}], Re\gamma \in [0, \beta_0^{-1}]$, et $\alpha \leq \alpha_0$.

II) Si on considère le profil tronqué $\tilde{\xi}(y) = \xi(y)1_{\xi \geq \xi_0} + \xi_0 1_{\xi \leq \xi_0}$, on trouve

$$A = (\frac{1-\xi_0}{1+\xi_0})^{\frac{1}{2}} - \frac{\beta}{\xi_0},$$

soit

$$\sigma = (A_0 g k)^{\frac{1}{2}} - kV_0.$$

III) (Helffer, L) Soit $\Gamma = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\sigma}{kV_a}$. Soit $\sigma_a = \frac{h^2}{\beta^2}$, et soit $\theta^{max} = \frac{(2\nu+1)^{2\nu+1}}{(2\nu+2)^{2\nu+2}}$. Dans la limite $h \to 0$, il existe $\Gamma_{max} = \theta^{max}\sigma_a$ tel que, pour $\Gamma < \Gamma_{max}$ on peut construire une solution asymptotique localisée, et on ne peut pas le faire pour $\Gamma > \Gamma_{max}$.

Commentaires:
Le résultat I) montre que le modèle de Kull-Anisimov, considéré globalement sur tout l'axe réel, ne correspond pas à la physique décrite par Catherine Cherfils.

Ceci est aussi vrai dans le cas du résultat III), qui indique une stabilisation haute fréquence différente de ce qui est prévu par la physique (meilleure?). Majoration impossible à obtenir dans le cas d'un problème d'ordre 5, non autoadjoint.

Résultat précédent obtenu (Cherfils, L, Raviart, 2000): le modèle où l'équation de la thermique est remplacé par les perturbations sont incompressibles:

$$\sigma = (Agk)^{\frac{1}{2}} - kV_{max}.$$

Malgré cela: démonstration:

• Remarque sur la matrice M_0: certains coefficients sont en $\frac{1}{\xi}$: explosent en $-\infty$ comme $(-y)^{\frac{1}{\nu}}$.

• Propriété: pour tout ξ, M_0 a trois valeurs propres positives et deux valeurs propres négatives $\pm\alpha\beta$, $\alpha\gamma\xi(y)$ et $\lambda_\pm(\xi(y), \alpha, \beta, \gamma)$.

Les solutions bornées du système à la fois en $+\infty$ et en $-\infty$ sont associées à la fois à la famille (de dimension 3) de solutions bornées en $-\infty$ et la famille (de dimension 2) de solutions bornées en $+\infty$.

On doit passer par $Y^{(2)}$, produit vectoriel de deux solutions du système (solution de $\frac{dY^{(2)}}{dy} + \alpha B^{(2)} Y^{(2)} = 0$) et $X^{(3)}$, produit vectoriel de trois solutions du système.

Proposition

On note $w_+^{(2)}$ l'unique solution du système tel que

$$w_+^{(2)}(y)e^{(\alpha\beta-\lambda_-(1))y} \to \frac{C_0}{\alpha\beta}W_+$$

On note $w_-^{(3)}$ l'unique solution du système tel que

$$w_-^{(3)}(-\frac{t}{\alpha\beta})e^{2t+\frac{\gamma}{\beta}\int_{t_*}^{t}\xi(-\frac{s}{\alpha\beta})ds} \to S$$

On note $Ev(\alpha,\beta,\gamma) = \alpha\beta w_+^{(2)}(y) \wedge w_-^{(3)}(y)e^{-\int_0^y[\alpha\gamma\xi(y')-(\xi(y'))^\nu]dy'}$. Cette fonction ne dépend pas de y et est analytique en α.

Comment fait-on?

a) Calcul classique de la solution sur $\xi(y) \in [\xi_0, 1[$ par développement asymptotique en α et utilisation du caractère exponentiel de la limite en $y \to +\infty$. Série asymptotique normalement convergente pour $\alpha \leq \alpha_0$.

b) On réordonne tous les termes du développement, pour mettre le résultat sous la forme

$$\sum a_j(\xi(y))(\frac{\alpha}{(\xi(y))^\nu})^j \frac{1}{(\xi(y))^\delta}.$$

Les a_j sont uniformément bornés par $R^j(1 - \xi(y))$ et les dérivées des termes successifs par $\frac{R^j}{\xi^{\nu j+\delta+1}}$.

On peut donc prolonger la somme de la série analytiquement pour $\frac{\alpha R}{(\xi(y))^\nu}$.

c) On calcule alors l'autre solution au voisinage de $-\infty$, en utilisant $\eta(t) = \alpha^{-\frac{1}{\nu}}\xi(-\frac{t}{\alpha\beta})$, $p(t) = \alpha^{\frac{1}{\nu}}\frac{\gamma}{\beta}p(t)$. On se ramène au système:

$$\frac{dZ}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{\eta^\nu}{\beta}(1-\alpha^{\frac{1}{\nu}}\eta) & 0 & 1 & \alpha^{\frac{1}{\nu}}\frac{\gamma}{\beta^2}\eta^{\nu+1} & 0 \\ p & 0 & -1 & \alpha^{\frac{2}{\nu}}\frac{1}{\beta^2}\eta^{\nu+2} & 0 \\ 2 & 1 & -p & \frac{\eta^\nu}{\beta} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{\eta^\nu}{\beta} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} Z.$$

On résout ce système si $t \to +\infty$ en utilisant $\frac{\eta^\nu}{\beta} = \frac{1}{\nu t}(1 + ph(p))$. Système principal résultat: coefficients soit constants soit en $\frac{1}{\nu t}$, reste en $\alpha^{\frac{1}{\nu}}t^{-1-\frac{1}{\nu}}$:

$$\frac{d\tilde{Z}}{dt} = M_0(0)\tilde{Z} + \frac{1}{\nu t}N\tilde{Z}.$$

Equation Fuchsienne. Résolution par série de Volterra. Solution valable pour $t \geq t_0$ quel que soit $t_0 > 0$.

Conclusion nette des opérations:

Trois zones: $\xi(y) \in [\xi_0, 1[$, $\frac{\alpha R}{(\xi(y))^\nu}) < 1$, $y \leq -\alpha\beta t_0$ (Goncharov).
Zone 1 permet d'avoir zone 2. La zone 2 a pour limite $y \geq \xi^{-1}(\alpha^{\frac{1}{\nu}} R^{\frac{1}{\nu}}$.
Recouvrement avec la zone 3.

Calcul de $Ev(\alpha, \beta, \gamma)$ dans le recouvrement des zones 2 et 3.

Nom de la fonction: fonction d'Evans du système.
Fonction introduite pour étudier le système aux perturbations issu du système non linéaire couplé EDO, EDP régissant l'influx nerveux (système de Hodgkin-Huxley, 1955, Evans 1970-1974).

• Pour obtenir le résultat I) il suffit de la zone 1 (très facile)
• Pour obtenir le résultat III), il faut beaucoup d'analyse semi-classique et d'étude de puits de potentiel (très technique et difficile car problème non autoadjoint)
• Pour obtenir le résultat II), on trouve, si t_* est dans la zone de recouvrement (notant $r = \frac{\gamma}{\beta}$)

$$Ev(0, \beta, \gamma) = e^{(r+1)t_*} t_*^{\frac{1}{2\nu}+\alpha_*} \frac{1 - \xi(0)}{\xi(0)} \beta C(t_*, r)$$

avec $C(t_*, r)$ tend vers $(r-1)(-\frac{r+1}{\nu} + \frac{1}{\nu+1})$.
Comme $r > 0$, la limite du premier terme de $Ev(0, \beta, \gamma)$ est donc $+\infty$, donc pour que $Ev(0, \beta, \gamma)$ soit constant il est récessaire que $(r-1)(-\frac{r+1}{\nu} + \frac{1}{\nu+1})$ soit nul. La seule valeur possible est $r = 1$ (Landau) et en étudiant directement ce cas, on trouve une contradiction. On pourrait aussi conclure $r = -1$, ce qui violerait l'hypothèse $r > 0$.

3 Une idée du non linéaire

Système: Euler incompressible avec gravité. Objectif: comprendre une situation où

$$\rho(0,x,z) = \rho_0(x) + \eta\tilde{\rho}(x)\cos kz$$

Variables $\vec{u}$, $T = \frac{\rho_0(x)}{\rho(t,x,z)}$, $q = \frac{p(t,x,z)-p_0(x)}{\rho_0(x)}$
Système

$$\begin{cases} \partial_t T + \vec{u}.\nabla T = k_0(x)uT \\ \partial_t \vec{u} + (\vec{u}.\nabla)\vec{u} + (T-1)\vec{g} + \nabla q + k_0(x)q\vec{e}_1 = 0 \\ \mathrm{div}\vec{u} = 0 \end{cases}$$

la fonction importante est l'inverse de la 'density gradient scalelength'

$$k_0(x) = \frac{\rho_0'(x)}{\rho_0(x)}.$$

Propriété de maximum absolu (vérifiée par le profil de Kull-Anisimov).
De plus, il faut avoir $k_0\rho_0^{-\frac{1}{2}}$ majoré.

Linéarisation: équation aux perturbations sur $T, \vec{u}, q$:

$$\begin{cases} \partial_t T_1 - k_0(x) u T_1 = 0 \\ \partial_t \vec{u}_1 + \nabla q_1 + T_1 \vec{g} + k_0(x) q_1 \vec{e}_1 = 0 \\ \mathrm{div} \vec{u}_1 = 0 \end{cases}$$

Equation de Rayleigh:

$$-\hat{u}'' - k_0(x)\hat{u}' + (k^2 + \frac{gk^2}{\sigma^2} k_0(x))\hat{u} = 0.$$

Autre forme (classique)

$$-(\rho_0 u')' + (k^2 \rho_0 + \frac{gk^2}{\sigma^2} \rho_0')u = 0.$$

Solution linéaire:

$$(\frac{k_0(x)}{\gamma} \cos kz, \hat{u} \cos kz, -\hat{u}' \sin kz, -\frac{\gamma}{k^2} \hat{u}' \sin kz) e^{\sigma t}.$$

Hypothèses de base:
k_0 a un unique maximum, non dégénéré, et on note $\Lambda^2 = \max k_0 |g|$.
Il existe k tel qu'il existe $\lambda(k)$ taux de croissance entre $\frac{\Lambda}{2}$ et Λ.

Par formulation variationnelle, on trouve des estimations sur σ:

$$\sigma^2 \leq \Lambda^2, \sigma^2 \leq gk.$$

Par estimation d'énergie, on trouve que, dans le système linéarisé avec second membre, on a

$$E'(t) \leq \Lambda E(t) + \sqrt{E(t)S(t)}$$

où S caractérise la norme du second membre.
On construit une série en η, que l'on fait converger normalement en η car le modèle est quadratique: on contrôle le nombre de termes dans le terme source à chaque étape $N+1$ par N, le terme source est contrôlé par N, donc le terme $\sqrt{E(t)S(t)}$ est majoré par $Ne^{N\lambda(k)t}$. En intégrant (Gronwall) on n'a pas de N dans le terme suivant de la série.

Pour finir l'analyse, on regarde l'écart entre la solution faiblement linéaire à l'ordre N et la vraie solution à même donnée initiale, on le fait converger en norme H^s (Moser), on le contrôle en norme L^2 et on majore ce terme de reste. On regarde alors le quasi-linéaire, on contrôle la somme des termes $N \geq 2$, et le terme principal est le premier, qui s'écarte de 0 en temps fini (logarithme de η).

$$T(t,x,z) = 1 + \eta T_1(x) \cos kz e^{\lambda(k)t} + \sum_2^N \eta^j e^{j\lambda(k)t} T_j(x,z) + T^d(t,x,z).$$