

Homogénéisation d'un modèle de convection-diffusion avec réaction en milieu poreux

Grégoire ALLAIRE, Annelise RAPHAEL
CMAP, Ecole Polytechnique
C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, 344, pp.523-528 (2007)
Travail soutenu par le GdR MOMAS

17 août 2008

- 1 Motivation : stockage des déchets nucléaires
- 2 Rappel : homogénéisation en convection-diffusion
- 3 Convection, diffusion et réaction
- 4 Résultats numériques

- Les réacteurs nucléaires produisent du combustible irradié, retraité à la Hague.
- Il reste une petite fraction de déchets nucléaires HAVL : environ $130m^3$ ou $200t$ par an en France (à comparer avec les $6Mt$ de déchets toxiques par an en France).
- Loi Bataille du 30 décembre 1991 : programme de recherches pour 15 ans sur le stockage définitif des déchets en 3 axes
 - La transmutation-incinération.
 - **Le stockage en site profond.**
 - L'entreposage en surface.
- Loi du 28 juin 2006 : autorisation de stockage instruite en 2015 pour une exploitation à partir de 2025.

- ANDRA, Agence nationale pour la gestion des déchets radioactifs.
- IRSN, Institut de radioprotection et de sûreté nucléaire.
- BRGM, CEA, CNRS, EDF, Universités...
- Programme PACEN du CNRS : 5 GdR dont le GdR MOMAS (MODélisations MATHématiques et Simulations numériques).

- Déchets à vie longue : exemple de l'iode 129 (demie durée de vie de 15 millions d'années).
- Vitrifiés et conditionnés dans des colis métalliques.
- Stockés dans des couches géologiques profondes (-600m), quasi-imperméables (argile) mais pas totalement...
- **Quel est le risque de diffusion jusqu'à la surface ?**
- Problème multi-échelles (en espace et en temps) : homogénéisation.
- Problème multi-physiques (convection-diffusion, chimie, endommagement mécanique, écoulements diphasiques, etc.).

Motivation : stockage des déchets nucléaires

Rappel : homogénéisation en convection-diffusion

Convection, diffusion et réaction

Résultats numériques

Historique

Les acteurs

Problématique



Lingot de fusion



Conteneur de déchets compactés



Fût en béton



Conteneur de déchets vitrifiés



Fût métallique

Différents types de colis de déchets

Motivation : stockage des déchets nucléaires

Rappel : homogénéisation en convection-diffusion

Convection, diffusion et réaction

Résultats numériques

Historique

Les acteurs

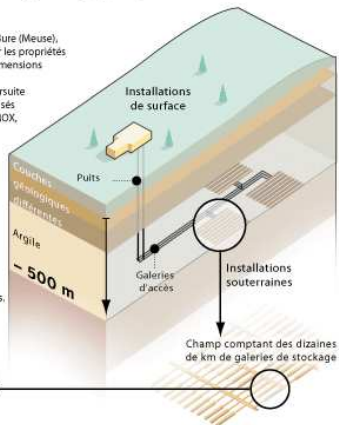
Problématique



2

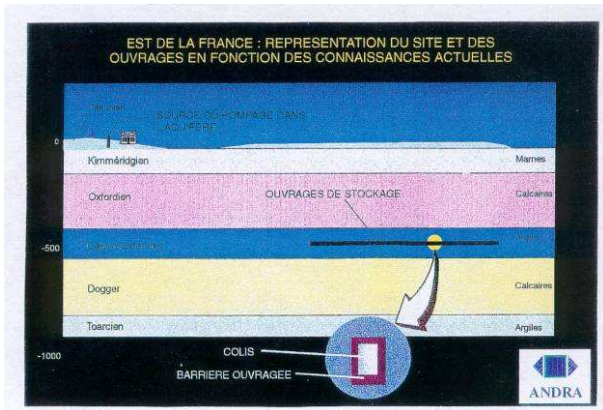
Stockage en formation géologique profonde

Un laboratoire souterrain a été construit à Bure (Meuse), par 500 mètres de profondeur, pour étudier les propriétés de rétention d'une couche argileuse. Les dimensions d'un stockage réel, d'un coût évalué à 15 milliards d'euros, dépendent de la poursuite ou non du retraitement des combustibles usés et du niveau d'utilisation du combustible MOX, comprenant du plutonium, qui produit des résidus plus «chauds». Le stockage devra confiner la radioactivité pendant environ un million d'années.

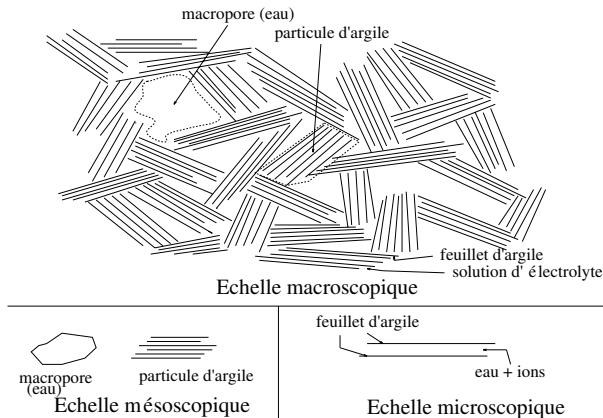


Motivation : stockage des déchets nucléaires
Rappel : homogénéisation en convection-diffusion
Convection, diffusion et réaction
Résultats numériques

Historique
Les acteurs
Problématique



L'argile est presque imperméable mais a tout de même une structure de milieu poreux.



Rappels sur le problème classique d'homogénéisation d'une équation de convection-diffusion en milieu poreux.

Voir par exemple :

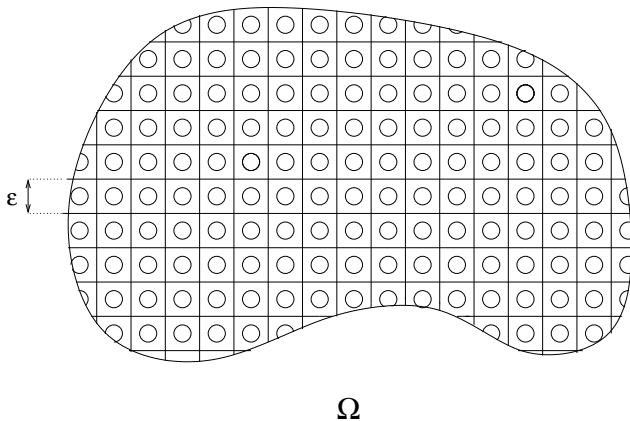


A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. Papanicolaou, *Asymptotic analysis for periodic structures*, North-Holland, Amsterdam (1978).



D. McLaughlin, G. Papanicolaou, O. Pironneau, *Convection of microstructure and related problems*, SIAM J. Appl. Math. 45 (1985), no. 5, 780–797.

Idéalisation périodique d'un milieu poreux Ω_ϵ



Notations :

- ϵ rapport entre les échelles microscopique et macroscopique
- x variable macroscopique
- $y = \frac{x}{\epsilon}$ variable microscopique

Milieu poreux périodique

$$\Omega_\epsilon = \Omega \setminus \bigcup_j \mathcal{O}_j^\epsilon \quad \text{et} \quad \mathcal{O}^\epsilon = \epsilon \mathcal{O}$$

Cellule de périodicité $Y = (0, 1)^N = Y^* \cup \mathcal{O}$ avec Y^* = partie fluide et \mathcal{O} = partie solide.

$$\begin{cases} c\left(\frac{\mathbf{x}}{\epsilon}\right) \frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} + \epsilon^{-1} \mathbf{b}\left(\frac{\mathbf{x}}{\epsilon}\right) \cdot \nabla u_\epsilon - \operatorname{div}\left(D\left(\frac{\mathbf{x}}{\epsilon}\right) \nabla u_\epsilon\right) = f & \text{dans } \Omega_\epsilon \\ D\left(\frac{\mathbf{x}}{\epsilon}\right) \nabla u_\epsilon \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_\epsilon \\ u_\epsilon(0) = u_{init} \end{cases}$$

- $u_\epsilon(t, \mathbf{x})$ concentration d'une espèce chimique dans un fluide
- $c(\mathbf{y}) \geq c_0 > 0$ porosité
- $D(\mathbf{y})$ tenseur de diffusion moléculaire (symétrique défini positif)
- $\mathbf{b}(\mathbf{y})$ champ de vitesse du fluide

Tous les coefficients sont périodiques

Vitesse de convection, incompressible, à moyenne nulle et non pénétrante

$$\operatorname{div}_y b(y) = 0, \quad \int_Y b(y) dy = 0, \quad b \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{O}$$

Chacune de ces 3 conditions est essentielle !

Mise à l'échelle (scaling) qui correspond à un nombre de Péclet

$$Pe_{local} = \mathcal{O}(1) \quad \Leftrightarrow \quad Pe_{macro} = \mathcal{O}(\epsilon^{-1})$$

Bien que, pour le problème considéré, il n'y ait qu'une seule valeur physique ϵ_0 du paramètre ϵ , on considère une **suite de problèmes** avec ϵ de plus en plus petit.

On suppose que

$$u_\epsilon(t, x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \epsilon^i u_i \left(t, x, \frac{x}{\epsilon} \right),$$

avec $u_i(t, x, y)$ fonction de deux variables d'espace x et y , **périodique en y** de période $Y = (0, 1)^N$.

- On injecte cette série dans l'équation et on utilise la règle

$$\nabla \left(u_i \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\epsilon} \right) \right) = \left(\epsilon^{-1} \nabla_y u_i + \nabla_x u_i \right) \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\epsilon} \right).$$

- On identifie chaque puissance de ϵ .

- On remarque que

$$\phi \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\epsilon} \right) = 0 \quad \forall \mathbf{x}, \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv 0 \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}.$$

- Seuls les 3 premiers termes de la série seront importants.

Lemme technique (*alternative de Fredholm*). Le problème aux limites

$$\begin{cases} b(y) \cdot \nabla_y v(y) - \operatorname{div}_y (D(y) \nabla_y v(y)) = g(y) \text{ dans } Y^* \\ D(y) \nabla_y v(y) \cdot n = h(y) \text{ sur } \partial \mathcal{O} \\ y \rightarrow v(y) \text{ } Y\text{-périodique} \end{cases}$$

admet une solution, unique à l'addition d'une constante près, **si et seulement si**

$$\int_{Y^*} g(y) dy + \int_{\partial \mathcal{O}} h(y) ds = 0.$$

Rappel : $Y = Y^* \cup \mathcal{O}$ avec $Y^* =$ partie fluide et $\mathcal{O} =$ partie solide.

Equation en ϵ^{-2} :

$$\begin{cases} b(y) \cdot \nabla_y u_0(x, y) - \operatorname{div}_y (D(y) \nabla_y u_0(x, y)) = 0 \text{ dans } Y^* \\ D(y) \nabla_y u_0(x, y) \cdot n = 0 \text{ sur } \partial \mathcal{O} \\ y \rightarrow u_0(x, y) \text{ } Y\text{-périodique} \end{cases}$$

Il s'agit d'une e.d.p. en y (x n'est qu'un paramètre).

Par unicité de la solution (à une constante près), on en déduit

$$u_0(x, y) \equiv u(x)$$

Equation en ϵ^{-1} : (problème de cellule ou correcteur)

$$\begin{cases} b(y) \cdot \nabla_y u_1(x, y) - \operatorname{div}_y (D(y) \nabla_y u_1(x, y)) = \\ \quad -b(y) \cdot \nabla_x u(x) + \operatorname{div}_y (D(y) \nabla_x u(x)) \text{ dans } Y^* \\ D(y) \nabla_y u_1(x, y) \cdot n = -D(y) \nabla_x u(x) \cdot n \text{ sur } \partial \mathcal{O} \\ y \rightarrow u_1(x, y) \text{ } Y\text{-périodique} \end{cases}$$

La CNS d'existence est vérifiée car $\int_{Y^*} b(y) dy = 0$.

On en déduit que u_1 dépend linéairement de $\nabla_x u$:

$$u_1(x, y) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) w_i(y)$$

Equation en ϵ^0 :

$$\begin{cases} b \cdot \nabla_y u_2(x, y) - \operatorname{div}_y (D \nabla_y u_2(x, y)) = -b \cdot \nabla_x u_1 \\ + \operatorname{div}_y (D \nabla_x u_1) + \operatorname{div}_x (D (\nabla_y u_1 + \nabla_x u)) - c \frac{\partial u}{\partial t} + f \text{ dans } Y^* \\ D(y) \nabla_y u_2 \cdot n = -D(y) \nabla_x u_1 \cdot n \text{ sur } \partial \mathcal{O} \\ y \rightarrow u_2(x, y) \text{ Y-périodique} \end{cases}$$

CNS d'existence et d'unicité de la solution u_2 :

$$\int_{Y^*} \left(-b \cdot \nabla_x u_1 + \operatorname{div}_y (D \nabla_x u_1) + \operatorname{div}_x (D (\nabla_y u_1 + \nabla_x u)) - c \frac{\partial u}{\partial t} + f \right) dy - \int_{\partial \mathcal{O}} D \nabla_x u_1 \cdot n ds = 0$$

On remplace u_1 par sa valeur en fonction de $\nabla_x u$ et on trouve le **problème homogénéisé**.

PROBLEME HOMOGENEISE

$$\begin{cases} c^* \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div} (D^* \nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ u(0) = u_{init} & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

avec la porosité homogénéisée :

$$c^* = \frac{1}{|Y^*|} \int_{Y^*} c(y) dy,$$

et le tenseur de diffusion homogénéisé :

$$D_{ij}^* = \frac{1}{|Y^*|} \int_{Y^*} D(y) (e_i + \nabla_y w_i(y)) \cdot (e_j + \nabla_y w_j(y)) dy.$$

Tenseur de diffusion homogénéisé :

$$D_{ij}^* = \int_{Y^*} D(y) (e_i + \nabla w_i) \cdot (e_j + \nabla w_j) dy$$

avec $(e_i)_{1 \leq i \leq N}$ la base canonique de \mathbb{R}^N et

$$\begin{cases} b \cdot \nabla_y (e_i + \nabla_y w_i) - \operatorname{div}_y (D (e_i + \nabla_y w_i)) = 0 & \text{dans } Y^* \\ D \nabla_y w_i \cdot n = -D e_i \cdot n & \text{sur } \partial \mathcal{O} \\ y \rightarrow w_i(y) & Y\text{-périodique,} \end{cases}$$

- La formule pour D^* n'est pas totalement explicite car il faut résoudre les problèmes de cellule.
- D^* ne dépend ni de Ω , ni de f , ni des conditions aux limites.
- Le tenseur D^* caractérise le milieu poreux.

Conclusion sur cette exemple : on a trouvé un tenseur effectif de diffusion, la vitesse de convection effective est nulle, et on n'a pas changé de modèle.

$$u_\epsilon(t, \mathbf{x}) \approx u(t, \mathbf{x}) + \epsilon \sum_{i=1}^N \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(t, \mathbf{x}) w_i \left(\frac{\mathbf{x}}{\epsilon} \right)$$

Généralisation dans ce qui suit : on tient compte des réactions chimiques et/ou d'un fluide compressible ou de vitesse moyenne non nulle.

Nouveaux résultats sur l'homogénéisation d'une équation de convection-diffusion-réaction en milieu poreux.






Convection-diffusion-réaction : on rajoute des termes linéaires de réaction dans le volume et sur le bord des pores.

Hypothèses :

- Aucune hypothèse sur la vitesse de convection b !
- Le milieu est infini périodique.
- Le nombre de Damkohler (équilibre diffusion/chimie) est localement de l'ordre de 1.
- Mise à l'échelle (scaling) qui correspond à

$$Pe_{local} = \mathcal{O}(1), \quad Da_{local} = \mathcal{O}(1)$$

$$Pe_{macro} = \mathcal{O}(\epsilon^{-1}), \quad Da_{macro} = \mathcal{O}(\epsilon^{-1})$$

-  H. Brenner, P. Adler, *Dispersion resulting from flow through spatially periodic porous media*, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A 307, no. 1498, 149–200 (1982).
-  R. Mauri, *Dispersion, convection, and reaction in porous media*, Phys.Fluids A3(5), May 1991.
-  P. Donato, A. Piatnitski, *Averaging of nonstationary parabolic operators with large lower order terms*, Multi scale problems and asymptotic analysis, 153–165, GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl., 24, Gakkotosho, Tokyo (2006).
-  Y. Capdeboscq, *Homogenization of a neutronic critical diffusion problem with drift*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 132 (2002), no. 3, 567–594.
-  A. Mikelic, V. Devigne, C.J. van Duijn, *Rigorous upscaling of the reactive flow through a pore, under dominant Peclet and Damkohler numbers*, preprint.

Changement de stratégie : développements asymptotiques à grande dérive $b^* \in \mathbb{R}^N$

$$u_\epsilon(t, \mathbf{x}) = e^{-r^* \epsilon^{-2} t} \sum_{j=0}^{+\infty} \epsilon^j u_j \left(t, \mathbf{x} - \frac{b^* t}{\epsilon}, \frac{\mathbf{x}}{\epsilon} \right),$$

avec $u_j(t, \mathbf{x}, y)$ fonction de deux variables d'espace \mathbf{x} et y , périodique en y de période $Y = (0, 1)^N$.

On a besoin des 2 nouveaux paramètres b^* (vitesse effective) et r^* (coefficient de réaction) pour que les CNS des problèmes de cellule soient satisfaites !

On injecte cette série dans l'équation et on utilise la règle usuelle

$$\nabla \left(u_i \left(t, \mathbf{x} - \frac{\mathbf{b}^* t}{\epsilon}, \frac{\mathbf{x}}{\epsilon} \right) \right) = \left(\epsilon^{-1} \nabla_{\mathbf{y}} u_i + \nabla_{\mathbf{x}} u_i \right) \left(t, \mathbf{x} - \frac{\mathbf{b}^* t}{\epsilon}, \frac{\mathbf{x}}{\epsilon} \right).$$

Mais on a aussi

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(u_i \left(t, \mathbf{x} - \frac{\mathbf{b}^* t}{\epsilon}, \frac{\mathbf{x}}{\epsilon} \right) \right) = \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} - \underbrace{\epsilon^{-1} \mathbf{b}^* \cdot \nabla_{\mathbf{x}}}_{\text{nouveau terme !}} u_i \right) \left(t, \mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\epsilon} \right)$$

De même, $\frac{\partial}{\partial t} \left(e^{-r^* \epsilon^{-2} t} \right) = -r^* \epsilon^{-2} e^{-r^* \epsilon^{-2} t}.$

Nouvelle équation en ϵ^{-2} :

$$\begin{cases} b(y) \cdot \nabla_y u_0 - \operatorname{div}_y (D(y) \nabla_y u_0) + r(y) u_0 = r^* c u_0 \text{ dans } Y^* \\ D(y) \nabla_y u_0 \cdot n + k u_0 = 0 \text{ sur } \partial \mathcal{O} \\ y \rightarrow u_0(x, y) \text{ } Y\text{-périodique} \end{cases}$$

Il s'agit d'un problème spectral ! Le paramètre r^* est la première valeur propre.

Par unicité du premier vecteur propre ψ (Krein-Rutman), on en déduit

$$u_0(x, y) \equiv u(x) \psi(y)$$

Nouvelle équation en ϵ^{-1} : (problème de cellule)

$$\begin{cases} b(y) \cdot \nabla_y u_1 - \operatorname{div}_y (D(y) \nabla_y u_1) + r(y) u_1 - r^* c u_1 = \\ \quad c b^* \cdot \nabla_x u_0 - b(y) \cdot \nabla_x u_0 + \operatorname{div}_y (D(y) \nabla_x u_0) \text{ dans } Y^* \\ D(y) \nabla_y u_1(x, y) \cdot n + k u_1 = -D(y) \nabla_x u_0 \cdot n \text{ sur } \partial \mathcal{O} \\ y \rightarrow u_1(x, y) \text{ } Y\text{-périodique} \end{cases}$$

On définit b^* de manière à ce que la CNS d'existence soit vérifiée, i.e. le second membre est orthogonal à ψ^* le premier vecteur propre adjoint.

On en déduit que u_1 dépend linéairement de $\nabla_x u_0(x, y) = \psi(y) \nabla_x u(x)$:

$$u_1(x, y) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \psi(y) w_i(y)$$

Nouvelle équation en ϵ^0 :

$$\begin{cases} b \cdot \nabla_y u_2 - \operatorname{div}_y (D \nabla_y u_2) + r u_2 - r^* c u_2 = c b^* \cdot \nabla_x u_1 - b \cdot \nabla_x u_1 \\ + \operatorname{div}_y (D \nabla_x u_1) + \operatorname{div}_x (D (\nabla_y u_1 + \nabla_x u_0)) - c \frac{\partial u_0}{\partial t} + f \text{ dans } Y^* \\ D(y) \nabla_y u_2 \cdot n + k u_2 = -D(y) \nabla_x u_1 \cdot n \text{ sur } \partial \mathcal{O} \\ y \rightarrow u_2(x, y) \text{ } Y\text{-périodique} \end{cases}$$

CNS d'existence et d'unicité de la solution u_2 :

$$\int_{Y^*} \left(c b^* \cdot \nabla_x u_1 - b \cdot \nabla_x u_1 + \operatorname{div}_y (D \nabla_x u_1) + \operatorname{div}_x (D (\nabla_y u_1 + \nabla_x u_0)) - c \frac{\partial u_0}{\partial t} + f \right) \psi^* dy - \int_{\partial \mathcal{O}} \psi^* D \nabla_x u_1 \cdot n ds = 0$$

On remplace u_1 par sa valeur en fonction de $\nabla_x u$ et on trouve le **problème homogénéisé**.

Théorème.

$$u_\epsilon(t, \mathbf{x}) \approx e^{-r^* \epsilon^{-2} t} \psi\left(\frac{\mathbf{x}}{\epsilon}\right) u\left(t, \mathbf{x} - \frac{\mathbf{b}^* t}{\epsilon}\right)$$

Problème homogénéisé :

$$\begin{cases} c^* \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(D^* \nabla u) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \\ u(0) = u_{init} & \text{dans } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

avec des formules nouvelles pour c^* et D^* , et la vitesse effective est

$$\mathbf{b}^* = \int_{Y^*} [\psi \psi^* \mathbf{b} + \psi D \nabla \psi^* - \psi^* D \nabla \psi] (\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

Problème spectral de cellule :

$$\begin{cases} b \cdot \nabla_y \psi - \operatorname{div}_y (D \nabla_y \psi) + r \psi = r^* c \psi & \text{dans } Y^* \\ D \nabla_y \psi \cdot n + k \psi = 0 & \text{sur } \partial \mathcal{O} \\ y \rightarrow \psi(y) & Y - \text{périodique} \end{cases}$$

Problème spectral **adjoint** de cellule :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y (b \psi^*) - \operatorname{div}_y (D \nabla_y \psi^*) + r \psi^* = r^* c \psi^* & \text{dans } Y^* \\ D \nabla_y \psi^* \cdot n + k \psi^* = 0 & \text{sur } \partial \mathcal{O} \\ y \rightarrow \psi^*(y) & Y - \text{périodique} \end{cases}$$

Première valeur propre r^* , première fonction propre $\psi(y) > 0$
(profil d'équilibre local entre diffusion, convection et réaction) et
première fonction propre adjointe $\psi^*(y) > 0$.

Autre écriture du résultat

$$u_\epsilon(t, \mathbf{x}) \approx \psi\left(\frac{\mathbf{x}}{\epsilon}\right) v_\epsilon(t, \mathbf{x})$$

avec $v_\epsilon(t, \mathbf{x}) = e^{-r^* \epsilon^{-2} t} u\left(t, \mathbf{x} - \frac{\mathbf{b}^* t}{\epsilon}\right)$

Problème homogénéisé modifié :

$$\begin{cases} \mathbf{c}^* \frac{\partial v_\epsilon}{\partial t} + \epsilon^{-1} \mathbf{c}^* \mathbf{b}^* \cdot \nabla v_\epsilon - \operatorname{div}(D^* \nabla v_\epsilon) + \epsilon^{-2} \mathbf{c}^* r^* v_\epsilon = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \\ v_\epsilon(0) = u_{init} & \text{dans } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

Remarques

- On retrouve le cas précédent si $r(y) \equiv 0$, $k = 0$ et vitesse $b(y)$ incompressible à moyenne nulle et non pénétrante. Dans ce cas on trouve $\psi(y) = \psi^*(y) \equiv 1$, $r^* = 0$ et $b^* = 0$.
- La chimie et le transport **ne se découplent pas** pour le calcul des coefficients effectifs.
- **Astuce pour simplifier l'équation** : la multiplier par ψ^* .
- Cf. H. Brenner - P. Adler (1982), R. Mauri (1991), Donato-Piatnitski (2006), G. Allaire - A.-L. Raphael (2007).
- Démonstration rigoureuse grâce à la convergence à deux échelles *avec dérive*.

Porosité homogénéisée ($\tilde{c} = c\psi\psi^*$) :

$$c^* = \frac{1}{|Y^*|} \int_{Y^*} \tilde{c}(y) dy.$$

Vitesse homogénéisée ($\tilde{b} = [\psi\psi^* b + \psi D\nabla\psi^* - \psi^* D\nabla\psi]$) :

$$b^* = \frac{1}{|Y^*|} \int_{Y^*} \tilde{b}(y) dy.$$

Remarque : le champ de vitesse ($\tilde{b} - b^*$) est incompressible, à moyenne nulle et non pénétrant !

Tenseur de diffusion homogénéisé ($\tilde{D} = D\psi\psi^*$) :

$$D_{ij}^* = \frac{1}{|Y^*|} \int_{Y^*} \tilde{D} (e_i + \nabla_y w_i) \cdot (e_j + \nabla_y w_j) dy.$$

Problème de cellule pour calculer D^* et

$$u_1(\mathbf{x}, y) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \psi(y) w_i(y) :$$

$$\begin{cases} (\tilde{\mathbf{b}} - \mathbf{b}^*) \cdot \nabla_y (\mathbf{e}_i + \nabla_y w_i) - \operatorname{div}_y (\tilde{\mathbf{D}} (\mathbf{e}_i + \nabla_y w_i)) = 0 \text{ dans } Y^* \\ \tilde{\mathbf{D}} \nabla_y w_i \cdot \mathbf{n} = -\tilde{\mathbf{D}} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n} \text{ sur } \partial \mathcal{O} \\ y \rightarrow w_i(y) \text{ } Y\text{-périodique} \end{cases}$$

Bien posé car $(\tilde{\mathbf{b}} - \mathbf{b}^*)$ est incompressible, à moyenne nulle et non pénétrant !

Théorème. (A., Nguetseng)

Soit une suite $\{u_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ bornée dans $L^2(\mathbb{R}^N)$. Il existe une sous-suite ϵ' et une limite $u_0(x, y) \in L^2(\mathbb{R}^N \times Y)$ telle que $u_{\epsilon'}$ converge à deux échelles vers u_0 au sens où

$$\lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} u_{\epsilon'}(x) \phi\left(x, \frac{x}{\epsilon'}\right) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \int_Y u_0(x, y) \phi(x, y) dx dy$$

pour toute fonction $\phi(x, y) \in L^2(\mathbb{R}^N; C_{\#}(Y))$ (i.e., Y -périodique en y).

Théorème. (Marusic-Paloka et Piatnitski)

Soit une vitesse de dérive b^* . Soit une suite $\{u_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ bornée dans $L^2((0, T) \times \mathbb{R}^N)$. Il existe une sous-suite ϵ' et une limite $u_0(t, x, y) \in L^2((0, T) \times \mathbb{R}^N \times Y)$ telle que $u_{\epsilon'}$ converge à deux échelles avec dérive vers u_0 au sens où

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u_{\epsilon'}(t, x) \phi \left(t, x - \frac{b^* t}{\epsilon'}, \frac{x}{\epsilon'} \right) dt dx \\ = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \int_Y u_0(t, x, y) \phi(t, x, y) dt dx dy \end{aligned}$$

pour toute fonction $\phi(t, x, y) \in L^2((0, T) \times \mathbb{R}^N; C_\#(Y))$ (i.e., Y -périodique en y).

Résultats numériques

- On utilise le logiciel FreeFem++
- Ce logiciel utilise la librairie Arpack++ pour les problèmes aux valeurs propres.
- On décentre les éléments finis pour le problème convectif ("streamline diffusion")
- Champ de vitesse dans la direction e_1 .

Convergence en maillages pour la valeur propre r^*

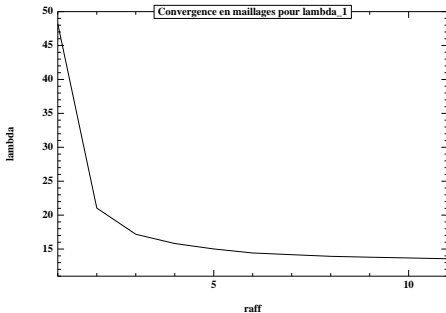
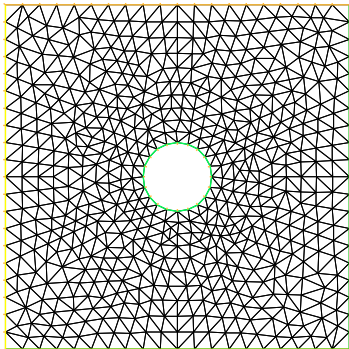
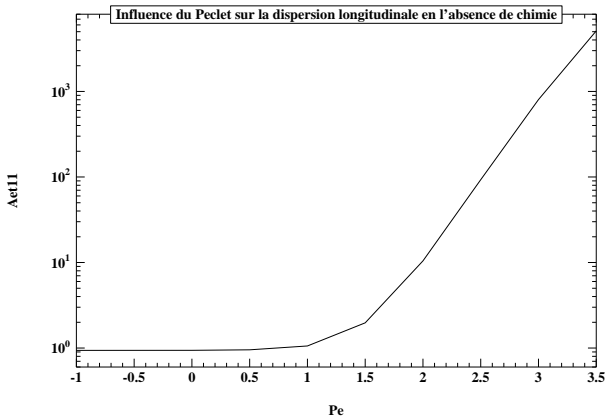


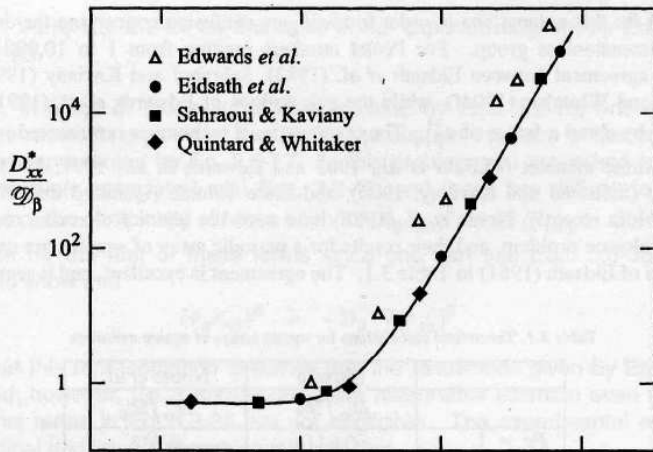
FIG.: Maillage de la cellule

FIG.: convergence en maillage

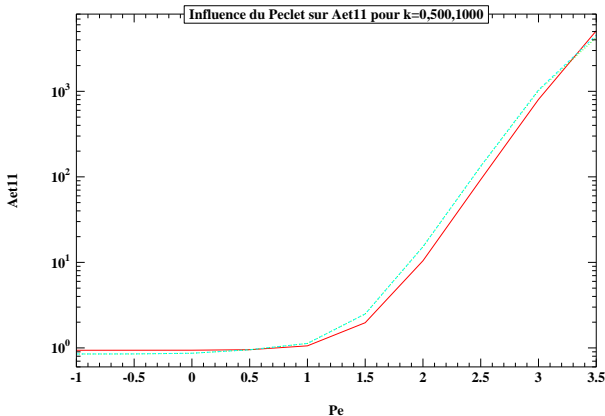
Cas sans chimie ($k = 0$) : on observe l'influence du Péclet microscopique sur D_{11}^*



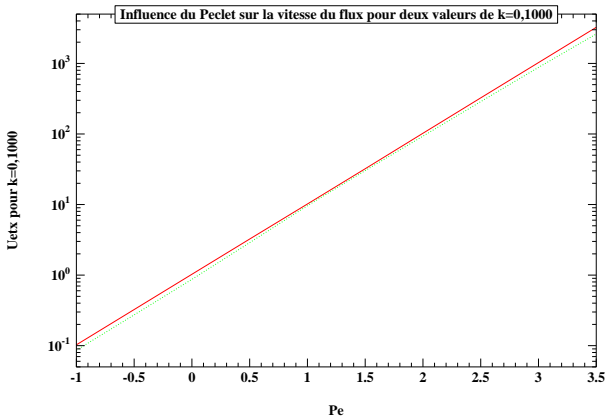
Comparaison avec des calculs réalisés sur une cellule comparable de 1981 à 1994 :



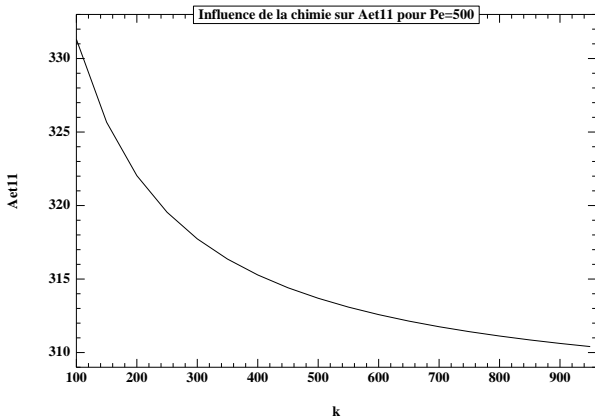
On trace D_{11}^* en fonction du Péclet pour les valeurs $k = 0$,
 $k = 500$ et $k = 1000$



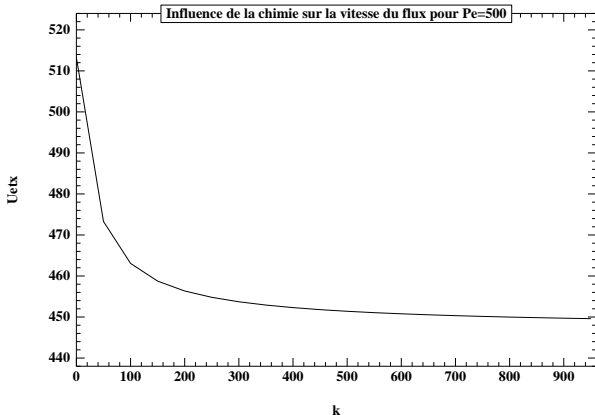
On trace b_1^* en fonction du Péclet pour les valeurs $k = 0$ et $k = 1000$



On trace D_{11}^* en fonction de k pour un Péclet fixé $Pe = 500$



On trace b_1^* en fonction de k pour un Péclet fixé $Pe = 500$



On trace la valeur propre r^* (taux de décroissance) en fonction de k pour un Péclet fixé $Pe = 500$

